LES NOMBRES PREMIERS & LA THEORIE DES NOMBRES

PETIT LEXIQUE DE LA THEORIE DES NOMBRES (1)

La théorie des nombres est une branche des mathématiques qui s'occupe des propriétés des nombres entiers (naturels ou relatifs). Elle a des connexions avec de nombreux domaines mathématiques.

En voici un petit lexique :

Théorie élémentaire des nombres

Le terme *élémentaire* désigne généralement une méthode qui n'use pas d'analyse complexe. Par exemple, le théorème des nombres premiers a été prouvé en utilisant une analyse complexe en 1896, mais la preuve élémentaire n'en a été trouvée qu'en 1949 par Erdős et Selberg.

Beaucoup de questions en théorie élémentaire des nombres apparaissent simples mais requièrent des considérations approfondies ; en voici deux exemples :

* la conjecture de Goldbach concernant l'expression des nombres pairs comme somme de deux nombres premiers,
* la conjecture des nombres premiers jumeaux à propos de l'infinité des paires de nombres premiers consécutifs.

Théorie analytique des nombres

La théorie analytique des nombres concerne l'étude des nombres au moyen d'outils d'analyse réelle et complexe ;

Exemples de problèmes traités en théorie analytique des nombres: le théorème des nombres premiers, la conjecture de Goldbach, la conjecture des nombres premiers jumeaux ou les conjectures de Hardy-Littlewood, le problème de Waring ou encore l'hypothèse de Riemann. Certains des outils les plus importants de la théorie analytique des nombres sont la méthode du cercle, les méthodes des cribles et les fonctions L.

Théorie algébrique des nombres

Un nombre algébrique est un nombre complexe qui est solution d'une équation polynomiale à coefficients dans le corps ***Q***. Par exemple, toute solution x de $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 9 = 0$ est un nombre algébrique.

Les fondations de cette branche telle que nous la connaissons ont été établies à la fin du XIXe siècle, lorsque les idéaux et la valuation ont été développés. L'impulsion du développement des idéaux par Ernst Kummer semble provenir de l'étude des lois de réciprocité supérieure, c'est-à-dire des généralisations de la loi de réciprocité quadratique.

Théorie combinatoire des nombres

Soit *A* un ensemble de N entiers. Considérons l'ensemble $A + A = \{m + n \mid m, n \in A\}$ constitué de toutes les sommes de deux éléments de *A* : *A* + *A* est-il beaucoup plus grand que *A* ? À peine plus grand ? *A* ressemble-t-il à une suite arithmétique ? Si nous partons d'un ensemble infini *A* assez grand, contient-il beaucoup d'éléments dans la progression arithmétique $a + b, a + 2b, a+3b, ..., a + nb$?

Ces questions sont caractéristiques de la théorie combinatoire des nombres, dont l'intérêt pour les questions de croissance et de distribution tient en partie au développement de ses liens avec la théorie ergodique, la théorie des groupes finis, la théorie des modèles et d'autres domaines.

Nombres premiers jumeaux

Soient p et q deux nombres premiers. On dit que (p, q) forme un couple de nombres premiers *jumeaux* si q = p + 2.

Hormis pour le couple (2, 3), l'écart de deux unités entre deux nombres premiers jumeaux est le plus petit possible.

Les premiers nombres premiers jumeaux sont : (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73), etc.

Au 25 décembre 2011, les plus grands nombres premiers jumeaux connus, découverts dans le cadre du projet de calcul distribué 'PrimeGrid', sont $3756801695685 \times 2^{666669} \pm 1$; ils possèdent 200 700 chiffres en écriture décimale.

Nombres premiers cousins

Soient p et q deux nombres premiers. On dit que (p, q) forme un couple de nombres premiers *cousins* si q = p + 4.

Les premiers *cousins* sont : (7,11), (13,17), (19,23), (37,41), (43,47), (67,71), (79,83), (97,101) ...

(1) L'œuvre originale a été publiée en 2003 aux Etats-Unis et traduite en 2005 en langue française par les Editions Héloïse d'Ormesson sous le titre « La Symphonie des Nombres premiers »

(2) Parue en janvier 2011 chez Dunod, l'étude reprend l'ouvrage *Les Nombres premiers* (épuisé) paru précédemment aux P.U.F. dans la collection « Que sais-je ? », en 1997 puis en 2000.

Il découle de la première conjecture de Hardy-Littlewood que les nombres premiers cousins ont la même densité asymptotique que les nombres premiers jumeaux.

Nombres de Mersenne premiers

En arithmétique, un nombre de Mersenne est un nombre entier de la forme :

$$M_n = 2^n - 1, \text{ avec } n \geq 1$$

Les nombres de Mersenne doivent leur nom au moine français mathématicien du 17ème siècle Marin MERSENNE.

Pour que M_n soit premier, il faut que n soit premier, mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Soit p un nombre premier impair :

$$M_p \text{ est premier si et seulement si } M_p \text{ divise } S_{p-1}, \text{ où } S_1 = 4 \text{ et, pour } k \geq 1, S_{k+1} = S_k^2 - 2.$$

Les quatre premiers nombres de Mersenne sont premiers (3, 7, 31, 127)

Depuis décembre 2018, le plus grand nombre de Mersenne premier découvert est $M_{82589933}$, c'est à dire :

$$2^{82589933} - 1$$

----

(1) Le présent lexique de la théorie des nombres tire principalement sa source à l'adresse :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_nombres