

## CHAPITRE III

### ENSEMBLES « N-UPLES » DE NOMBRES PREMIERS

Ce chapitre est consacré aux ensembles denses - dits *n-uples* - de nombres premiers tels que les couples de *jumeaux* ou de *cousins*, les *quadruplets*, *sextuplets* et *octuplets*. Il existe une infinité de jumeaux et de cousins, comme nous le démontrerons aux lecteurs dûment autorisés.

Dans ce qui suit, nous désignons tout nombre entier par la lettre *m* ou *n* et réservons la lettre *p* aux nombres premiers.

#### A - COUPLES de NOMBRES PREMIERS dits *JUMEAUX* ou *COUSINS*.

##### A<sub>1</sub> – NOMBRES PREMIERS JUMEAUX

Par définition, les nombres premiers *jumeaux* diffèrent de deux unités.

On montre aisément que la demi-somme de nombres premiers *jumeaux* strictement supérieurs à 3 est un multiple de six, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2} [p + (p+2)] = p+1 \equiv 0 \pmod{6}$$

En outre, la demi-somme des couples de jumeaux est un multiple de 30 lorsque *p* est de la forme  $30n-1$ , car dans ce cas :

$$\frac{1}{2} [p + (p+2)] = \frac{1}{2} [(30n-1) + (30n+1)] = 30n$$

Ces couples de jumeaux particuliers apparaissent en vert dans les deux tables ci-dessous : leur nombre est 76 (1,52% de 5000) dans la première et 64 (1,28% de 5000) dans la seconde. Ils sont au total 140 (1,4%) parmi les 401 jumeaux inférieurs à 10000.

##### 1 - Liste des jumeaux inférieurs à 5000 :

3 5 ; 5 7 ; 11 13 ; 17 19 ; 29 31 ; 41 43 ; 59 61 ; 71 73 ;  
101 103 ; 107 109 ; 137 139 ; 149 151 ; 179 181 ; 191 193 ; 197 199 ; 227 229 ; 239 241 ; 269 271 ; 281 283 ; 311 313 ; 347 349 ; 419 421 ;  
431 433 ; 461 463 ; 521 523 ; 569 571 ; 599 601 ; 617 619 ; 641 643 ; 659 661 ; 809 811 ; 821 823 ; 827 829 ; 857 859 ; 881 883 ;  
1019 1021 ; 1031 1033 ; 1049 1051 ; 1061 1063 ; 1091 1093 ; 1151 1153 ; 1229 1231 ; 1277 1279 ; 1289 1291 ; 1301 1303 ;  
1319 1321 ; 1427 1429 ; 1451 1453 ; 1481 1483 ; 1487 1489 ; 1607 1609 ; 1619 1621 ; 1667 1669 ; 1697 1699 ; 1721 1723 ;  
1787 1789 ; 1871 1873 ; 1877 1879 ; 1931 1933 ; 1949 1951 ; 1997 1999 ;  
2027 2029 ; 2081 2083 ; 2087 2089 ; 2111 2113 ; 2129 2131 ; 2141 2143 ; 2237 2239 ; 2267 2269 ; 2309 2311 ; 2339 2341 ; 2381 2383 ;  
2549 2551 ; 2591 2593 ; 2657 2659 ; 2687 2689 ; 2711 2713 ; 2729 2731 ; 2789 2791 ; 2801 2803 ; 2969 2971 ; 2999 3001 ;  
3119 3121 ; 3167 3169 ; 3251 3253 ; 3257 3259 ; 3299 3301 ; 3329 3331 ; 3359 3361 ; 3371 3373 ; 3389 3391 ; 3461 3463 ; 3467 3469 ;  
3527 3529 ; 3539 3541 ; 3557 3559 ; 3581 3583 ; 3671 3673 ; 3767 3769 ; 3821 3823 ; 3851 3853 ; 3917 3919 ; 3929 3931 ;  
4001 4003 ; 4019 4021 ; 4049 4051 ; 4091 4093 ; 4127 4129 ; 4241 4243 ; 4259 4261 ; 4271 4273 ; 4337 4339 ; 4421 4423 ;  
4481 4483 ; 4517 4519 ; 4547 4549 ; 4637 4639 ; 4649 4651 ; 4721 4723 ; 4787 4789 ; 4799 4801 ; 4931 4933 ; 4967 4969 ;

##### 2 - Liste des jumeaux compris entre 5001 et 10000 :

5021 5023 ; 5099 5101 ; 5231 5233 ; 5279 5281 ; 5417 5419 ; 5441 5443 ; 5477 5479 ; 5501 5503 ; 5519 5521 ; 5639 5641 ;  
5651 5653 ; 5657 5659 ; 5741 5743 ; 5849 5851 ; 5867 5869 ; 5879 5881 ;  
6089 6091 ; 6131 6133 ; 6197 6199 ; 6269 6271 ; 6299 6301 ; 6359 6361 ; 6449 6451 ; 6551 6553 ; 6569 6571 ; 6659 6661 ; 6689 6691 ;  
6701 6703 ; 6761 6763 ; 6779 6781 ; 6791 6793 ; 6827 6829 ; 6869 6871 ; 6947 6949 ; 6959 6961 ;  
7127 7129 ; 7211 7213 ; 7307 7309 ; 7331 7333 ; 7349 7351 ; 7457 7459 ; 7487 7489 ; 7547 7549 ; 7559 7561 ; 7589 7591 ; 7757 7759 ;  
7877 7879 ; 7949 7951 ;  
8009 8011 ; 8087 8089 ; 8219 8221 ; 8231 8233 ; 8291 8293 ; 8387 8389 ; 8429 8431 ; 8537 8539 ; 8597 8599 ; 8627 8629 ; 8819 8821 ;  
8837 8839 ; 8861 8863 ; 8969 8971 ; 8999 9001 ;  
9011 9013 ; 9041 9043 ; 9239 9241 ; 9281 9283 ; 9341 9343 ; 9419 9421 ; 9431 9433 ; 9437 9439 ; 9461 9463 ; 9629 9631 ; 9677 9679 ;  
9719 9721 ; 9767 9769 ; 9857 9859 ; 9929 9931 ;

**Récapitulons :**

Sur les mille premiers nombres entiers, on compte **168 nombres premiers (16,8%), dont 69 jumeaux (6,9%)** ;

Entre 1001 et 2000, on en compte **135 (13,5%), dont 52 jumeaux (5,2%)** ;

Entre 2001 et 3000, on en compte **127 (12,7%), dont 42 jumeaux (4,2%)** ;

Entre 3001 et 4000, on en compte **120 (12,0%), dont 42 jumeaux (4,2%)** ;

Entre 4001 et 5000, on en compte **119 (11,9%), dont 40 jumeaux (4,0%)**.

Entre 5001 et 6000, on en dénombre **114 (11,4%), dont 32 jumeaux (3,2%)**.

Entre 6001 et 7000, on en dénombre **117 (11,7%), dont 38 jumeaux (3,8%)**.

Entre 7001 et 8000, on en dénombre **107 (10,7%), dont 26 jumeaux (2,6%)**.

Entre 8001 et 9000, on en dénombre **110 (11,0%), dont 30 jumeaux (3,0%)**.

Entre 9001 et 10000, on en dénombre **112 (11,2%), dont 30 jumeaux (3,0%)**.

Il y a au total **1229 nombres premiers (12,3%) inférieurs à 10 000, dont 401 jumeaux (4,0%)**

Sur les dix premières suites de mille entiers, le ratio de nombres premiers a baissé exactement d'un tiers, de 16,8% pour la première à 11,2% pour la dixième, tandis que celui des jumeaux est passé de 6,9% à 3,0%, avec un minimum de 2,6%. Nous verrons pourquoi les nombres premiers jumeaux (tout comme les cousins) se rarifient plus rapidement que l'ensemble des nombres premiers au fur et à mesure qu'ils croissent vers l'infini.

**A<sub>2</sub> – NOMBRES PREMIERS COUSINS**

Par définition, l'écart entre les nombres premiers *cousins* est de quatre unités.

Les couples de *cousins* inférieurs à 4000 sont :

3 7 ; 7 11 ; 13 17 ; 19 23 ;

37 41 ; 43 47 ; 67 71 ; 79 83 ; 103 107 ; 109 113 ; 127 131 ; 163 167 ; 193 197 ; 223 227 ; 229 233 ; 277 281 ;

307 311 ; 313 317 ; 349 353 ; 379 383 ; 397 401 ; 439 443 ; 457 461 ; 463 467 ; 487 491 ; 499 503 ; 613 617 ; 643 647 ;

673 677 ; 739 743 ; 757 761 ; 769 773 ; 823 827 ; 853 857 ; 859 863 ; 877 881 ; 883 887 ; 907 911 ; 937 941 ; 967 971 ;

1009 1013 ; 1087 1091 ; 1093 1097 ; 1213 1217 ; 1279 1283 ; 1297 1301 ; 1303 1307 ; 1423 1427 ; 1429 1433 ; 1447 1451 ;

1483 1487 ; 1489 1493 ; 1549 1553 ; 1567 1571 ; 1579 1583 ; 1597 1601 ; 1609 1613 ; 1663 1667 ; 1693 1697 ; 1783 1787 ;

1867 1871 ; 1873 1877 ; 1993 1997 ; 1999 2003 ; 2083 2087 ; 2137 2141 ; 2203 2207 ; 2239 2243 ; 2269 2273 ; 2293 2297 ;

2347 2351 ; 2377 2381 ; 2389 2393 ; 2437 2441 ; 2473 2477 ; 2539 2543 ; 2617 2621 ; 2659 2663 ; 2683 2687 ; 2689 2693 ;

2707 2711 ; 2749 2753 ; 2797 2801 ; 2833 2837 ; 2857 2861 ; 2953 2957 ; 3019 3023 ; 3037 3041 ; 3079 3083 ; 3163 3167 ;

3187 3191 ; 3217 3221 ; 3253 3257 ; 3319 3323 ; 3343 3347 ; 3457 3461 ; 3463 3467 ; 3529 3533 ; 3613 3617 ; 3673 3677 ;

3697 3701 ; 3793 3797 ; 3847 3851 ; 3877 3881 ; 3907 3911 ; 3919 3923 ; 3943 3947 ;

Sur les mille premiers entiers, on compte 168 nombres premiers (16,8%), dont 79 cousins (7,9%) contre 69 jumeaux ;

Entre 1001 et 2000, on dénombre 135 nombres premiers (13,5%), dont 48 *cousins* (4,8%) contre 52 jumeaux ;

Entre 2001 et 3000, on dénombre 127 nombres premiers (12,7%), dont 44 *cousins* (4,4%) contre 42 jumeaux ;

Entre 3001 et 4000, on compte 120 nombres premiers (12,0%), dont 42 *cousins* (4,2%) contre 42 jumeaux.

**Récapitulons :**

Parmi les 550 nombres premiers (13,75%) inférieurs à 4000, les cousins sont au nombre de 213 (5,32%).

On montre aisément que la demi-somme des cousins plus grands que 5 est toujours un multiple de 3, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2} [p + (p+4)] = p+2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Lorsque le premier élément  $p$  d'un couple de cousins est de la forme ' $30n+13$ ' ( $n \geq 0$ ), la demi-somme des *cousins* est toujours un multiple de 15, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{2} [p + (p+4)] = p+2 \equiv 0 \pmod{15}$$

En effet, en remplaçant  $p$  par ' $30n+13$ ', on trouve :

$$\frac{1}{2} [30n+13 + (30n+13+4)] = \frac{1}{2} [60n+30] = 15 [2n+1]$$

Premiers exemples :

13 17 ; 43 47 ; 103 107 ; 163 167 ; 193 197

Le 1<sup>er</sup>, le 3<sup>ème</sup> et le 5<sup>ème</sup> couple de cousins ci-dessus figurent au centre des quadruplets de nombres premiers suivants :

11 13 17 19 - 101 103 107 109 - 191 193 197 199

## B - NOMBRES PREMIERS « 4-UPLES » ou *QUADRUPLETS*

Il s'agit d'une succession de quatre nombres premiers séparés par le plus petit espace possible.

Les premiers quadruplets tels que leurs bornes (nombres premiers extrêmes) soient espacées au maximum de huit ou dix unités sont :

3 5 7 11 ; 5 7 11 13 ; 7 11 13 17 ; 11 13 17 19 ; 13 17 19 23 ; 37 41 43 47 ; 97 101 103 107 ; 101 103 107 109 ;  
 103 107 109 113 ; 191 193 197 199 ; 223 227 229 233 ; 307 311 313 317 ; 457 461 463 467 ; 821 823 827 829 ;  
 853 857 859 863 ; 877 881 883 887 ; 1087 1091 1093 1097 ; 1297 1301 1303 1307 ; 1423 1427 1429 1433 ;  
 1481 1483 1487 1489 ; 1483 1487 1489 1493 ; 1867 1871 1873 1877 ; 1871 1873 1877 1879 ; 1993 1997 1999 2003 ;  
 2081 2083 2087 2089 ; 2683 2687 2689 2693 ; 3251 3253 3257 3259 ; 3457 3461 3463 3467 ; 3461 3463 3467 3469 ;

On distingue trois types de quadruplets (pour  $p$  entier premier strictement supérieur à 3) :

$p, p+2, p+6, p+8$  (cas **a**) ;  $p, p+4, p+6, p+10$  (cas **b**) ;  $p, p+6, p+8, p+14$  (cas **c**)

\* Quadruplets de type 'a' (indiqués ci-dessus en couleur verte)

Les nombres premiers centraux sont  $(p+2)$  et  $(p+6)$  ; leur demi-somme est égale à  $(p+4)$ .

Dans les quadruplets de type 'a', la somme  $p+4$  est un multiple de 15, ce qui s'écrit :

$$p+4 \equiv 0 \pmod{15}$$

Les premiers de ces quadruplets sont :

11 13 17 19 ; 101 103 107 109 ; 191 193 197 199 ; 821 823 827 829 ;  
 1481 1483 1487 1489 ; 16061 16063 16067 16069 ;  
 122201 122203 122207 122209, etc.

\* Quadruplets de type 'b' :

Les nombres premiers centraux sont  $(p+4)$  et  $(p+6)$  ; leur demi-somme est égale à  $(p+5)$ .

Dans les quadruplets de type 'b', la somme  $p+5$  est un multiple de 6, ce qui s'écrit :

$$p+5 \equiv 0 \pmod{6}$$

Les premiers de ces quadruplets sont :

7 11 13 17 ; 13 17 19 23 ; 37 41 43 47 ; 97 101 103 107 ; 103 107 109 113 ; 223 227 229 233 ;  
 307 311 313 317 ; 457 461 463 467 ; 853 857 859 863 ; 877 881 883 887 ; 1087 1091 1093 1097 ;  
 1297 1301 1303 1307 ; etc.

La suite des premiers quadruplets – tous types confondus – est la suivante :

7 11 13 17 ; 11 13 17 19 ; 13 17 19 23 ; 23 29 31 37 ; 37 41 43 47 ; 53 59 61 67 ; 97 101 103 107 ;  
 101 103 107 109 ; 103 107 109 113 ; 191 193 197 199 ; 223 227 229 233 ; 307 311 313 317 ;  
 457 461 463 467 ; 563 569 571 577 ; 593 599 601 607 ; 821 823 827 829 ; 853 857 859 863 ;  
 1087 1091 1093 1097 ; 1223 1229 1231 1237 ; 1283 1289 1291 1297 ; 1297 1301 1303 1307 ;  
 1481 1483 1487 1489 ; ... ; 16061 16063 16067 16069 ; ... ; 122201 122203 122207 122209, etc.

## C - ENSEMBLES « 6-UPLES » DE NOMBRES PREMIERS ou *SEXTUPLETS*

Les premiers sextuplets sont :

7 11 13 17 19 23 ; 11 13 17 19 23 29 ; 13 17 19 23 29 31 ; 17 19 23 29 31 37 ; ... ;  
 97 101 103 107 109 113 ; ... 1481 1483 1487 1489 1493 1499 ; ... 16057 16061 16063 16067 16069 16073.